

Sujet

On considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous réels positifs a et b , on a : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

2. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Etablir l'inégalité de Hölder : $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

3. En écrivant $(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$.

Obtenir l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Solution

1. Montrons que pour tous réels positifs a et b , on a : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

L'inégalité est vérifiée lorsque $a = 0$ et $b = 0$.

Supposons a et b strictement positifs et utilisons la concavité de la fonction $\ln$, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in [0;1], \forall x > 0, \forall y > 0, (1-\alpha) \ln x + \alpha \ln y \leq \ln((1-\alpha)x + \alpha y).$$

Appliquons cette inégalité à $x = a^p$ et $y = b^q$ avec $\alpha = \frac{1}{q}$.

$$\text{On a : } \ln(ab) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right).$$

On obtient l'inégalité voulue par croissance de la fonction exponentielle.

2. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Etablissons l'inégalité de Hölder : $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Appliquons l'inégalité de la question 1. avec $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$.

L'inégalité est immédiate si x ou y est l'élément nul de $\mathbb{C}^n$. Supposons pour la suite x et y non nuls de sorte que $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$ ne sont pas nuls. Soit $i \in 1; n$.

$$\text{On a : } \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

On somme ces inégalités pour i allant de 1 à n ; on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant de part et d'autre par le réel $\|x\|_p \|y\|_q$, on obtient l'inégalité voulue.

3. Etablissons l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Par l'inégalité triangulaire, on a : $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$.

$$\text{D'où : } \|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p.$$

En utilisant l'indication de la question, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}.$$

L'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}.$$

On sait que : $(p-1)q = pq - q = p$.

$$\text{D'où : } \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/q}.$$

$$\text{Donc, comme : } 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$$

$$\text{On a : } \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

$$\text{Ainsi : } \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$