

Rappels

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

- Une partie A de E est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet une suite extraite qui converge dans A .
- Pour qu'une partie B de E soit fermée, il faut et il suffit que toute suite convergente d'éléments de B ait sa limite dans B .

Sujet

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soient A et B deux parties de E .

Montrer que si A est une partie compacte et B une partie fermée, $A + B$ est une partie fermée.

Solution

Soient A une partie compacte et B une partie fermée de E . Pour montrer que $A + B$ est fermée, il suffit d'établir que : $\overline{A + B} \subset A + B$.

Soit c un élément quelconque de $\overline{A + B}$.

Il existe donc une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A + B$ qui converge vers c .

A étant une partie compacte, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $a \in A$.

Considérons alors la suite $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (c_{\phi(n)} - a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme la suite $(c_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite convergente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle converge également vers c , et par conséquent la suite $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $c - a$.

Or, par hypothèse, B est une partie fermée de E ce qui implique que : $c - a \in B$.

En écrivant $c = a + (c - a)$, il apparaît que : $c \in A + B$.

On a ainsi montré que : $\overline{A + B} \subset A + B$.

Exercice

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soient A et B deux parties de E .

Montrer que si A et B sont des parties compactes, $A + B$ est aussi une partie compacte.