

Proposition : Somme de Riemann

Soient f une fonction continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_a^b f.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que le nombre réel u_n est une **somme de Riemann** relative à f sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple

Montrons que la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$, est convergente et déterminer sa limite.

$$\text{On a : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

On reconnaît dans cette dernière expression de u_n une somme de Riemann relative à la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$.

On peut alors affirmer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et admet pour limite $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$.

$$\text{Or, on a : } \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\text{D'où : } \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1$$

$$\underline{\text{Ainsi : }} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Exercice 1

Montrer que la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Montrer que la suite de nombres réels $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)^n}{n^n \sqrt{n^2 + k^2}}$, est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Calculer la limite de $P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{1/n}$.